Задача оптимального потокораспределения. Модель постоянного тока (DC)

Задача оптимального потокораспределение

(OPTIMAL POWER FLOW, OPF).

Модель постоянного тока (DC)

$P_{ij} = b_{ij} V_i V_j (\delta_i - \delta_j)$ – поток активной мощности по ветви (i, j), вытекающий/втекающий из/в узла i

Баланс активной мощности в узле i

$$P_i^{п} - P_i^{г} = \sum_{j \neq i} b_{ij} V_i V_j (\delta_i - \delta_j) =$$

(если i и j - не соседние узлы, $b_{ij} = 0$)

$$= \Big(\sum_{i \neq j} b_{ij} V_i V_j \Big) \delta_i - \sum_{j \neq i} b_{ij} V_i V_j \delta_j$$

В векторной форме:

$$p^{\text{П}} - p^{\Gamma} - B\delta = 0$$

$$p^{\text{П}}, p^{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \delta \in \mathbb{R}^{N}, \quad \delta_0 = 0$$

(узел 0 - считаем балансирующим)

$$B \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N}$$

2. Ограничение на переток активной мощности по ветвям (группам ветвей)

$$\underline{P}_{ij} \leq P_{ij} \leq \overline{P}_{ij}$$

$$\underline{P}_{s} \leq \sum_{(i,j)\in S} P_{ij} \leq \overline{P}_{s}$$

3. Ограничение на максимальный объем

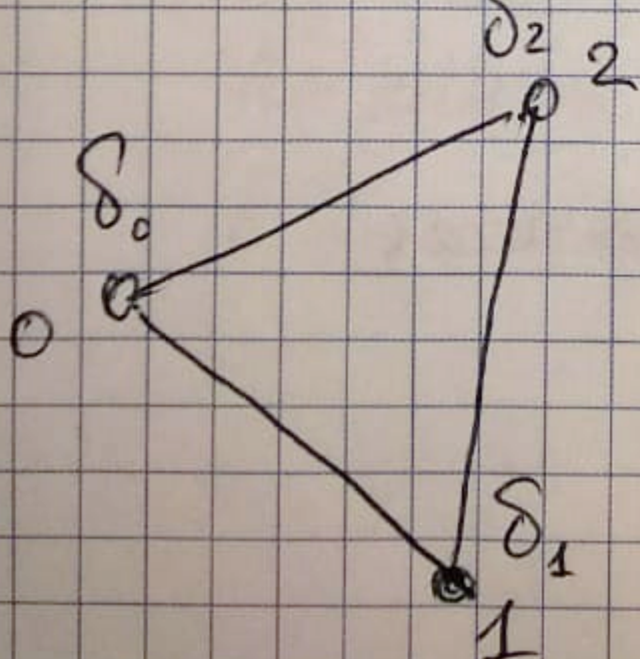
$$0 \le p_i^{\Pi} \le \bar{p}_i^{\Pi}$$

$$0 \le p_i^{\Gamma} \le \bar{p}_i^{\Gamma}$$

4. Целевая функция – функция благосостояния

$$\sum_i \left(c_i^{\Pi} p_i^{\Pi} - c_i^{\Gamma} p_i^{\Gamma}\right) \to \max_{\substack{(p^{\Pi}, p^{\Gamma}, \delta) \in \\ \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N}}}$$

Пример



$$\Gamma_0 : \; C_0^{\Gamma} = 1 , \; \overline{P}_0^{\Gamma} = 10$$

$$\Gamma_1 : \; C_1^{\Gamma} = 2 , \; P_0^{\Gamma} = 20$$

$$\Pi_2 : \; C_2^{\Pi} = +\infty$$

$$\overline{P}_2^{\Pi} = 26$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \delta_0 = 0 \Rightarrow$$

Система ур-й балансов мощности в узлах имеет вид

$$\begin{aligned}
-P_0^{\text{Г}} + \delta_1 + \delta_2 &= 0 \quad [\lambda_0] \\
-P_1^{\text{Г}} - 2\delta_1 + \delta_2 &= 0 \quad [\lambda_1] \\
P_2^{\text{П}} + \delta_1 - 2\delta_2 &= 0 \quad [\lambda_2]
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай без ограничений на пропускную способность.

Целевая функция:

$$c^{\text{д}} P_2^{\text{п}} - P_0^{\text{г}} - 2P_1^{\text{г}} \to max$$

Решение.

1). В отсутствие ограничений на передачу самый дешевый генератор загружается на максимальный объем, ценозамыкающим (балансирующим является $2^й$ генератор)

$$P_0^Г = \bar{P}_0^Г = 10$$

$$P_1^Г = \bar{P}_2^П - P_0^Г = 26 - 10 = 16$$

(После нахождения остальных переменных и множителей Лагранжа, необходимо убедиться в выполнении условий ККТ)

2) Найдем δ. Подставим $P_0^Г$, $P_1^Г$, $P_2^П$ в уравнения баланса мощности

$$-10+\delta_1+\delta_2=0$$
$$-16-2\delta_1+\delta_2=0$$
$$26+\delta_1-2\delta_2=0$$

$$6+3\delta_1=0$$
$$\Downarrow$$
$$\delta_1=-2$$
$$\Downarrow$$
$$\delta_2=10-\delta_1=12$$

3) Найдем оптимальные множители Лагранжа:

$$-c_i^{Г} = -\lambda_i + \pi_i^{Г+} - \pi_i^{Г-}$$

$$c_i^{П} = \lambda_i + \pi_i^{П+} - \pi_i^{П-}$$

$\pi_0^{Г-} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1 + \pi_0^{Г+}$

$\pi_1^{Г+}, \pi_1^{Г-} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$

$$\pi_2^{\Pi-} = 0 \Rightarrow +\infty = \lambda_2 + \pi_2^{\Pi+}$$

$$\lambda^T [B^2 \; B^3] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0$$

$$\lambda \in \operatorname{Ker} B$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^T = \alpha(1, 1, 1),$$

т.к. $\lambda_1 = 2 = \lambda^T = (2, 2, 2)$

$\Rightarrow \pi_0^{\Gamma+} = 1 > 0 \Rightarrow$ удовлетворяет

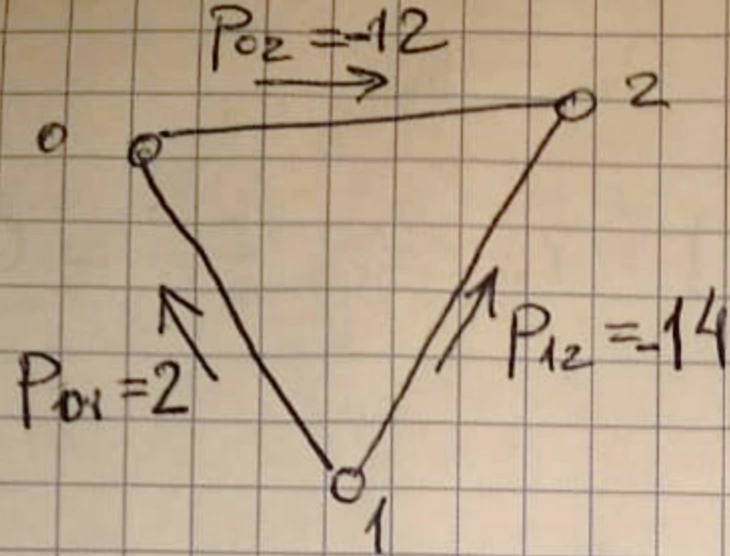
условием ККТ

Определить потоки мощности по ветвям:

$P_{02} = \delta_0 - \delta_2 = -12$ – поток, вытекающий из узла 0 в узел 2

$P_{01} = \delta_0 - \delta_1 = 2$

$P_{12} = \delta_1 - \delta_2 = -2 - 12 = -14$



1. По 2-му закону Кирхгофа в электрической сети <u>не</u> может сформироваться циклический переток

2. Поток от источника к потребителю не всегда направлен "по кратчайшему пути".

Дополнительно рассм. ограничение на переток мощности:

$$P_{20} = \delta_2 - \delta_0 \leq 11 = \overline{P}_{20}$$

Очевидно, в оптимальном решении

$$\delta_2 - \delta_0 = 11 \Rightarrow \delta_2 = 11$$

Из уравнения баланса м.т. в узле 2 найдем δ_1

$$P_2^{\text{П}} = 26 + \delta_1 - 2\delta_2 = 0 \Rightarrow$$

$\delta_1 = 2\delta_2 - 26 = -4$

Определим генерацию в узлах 0 и 1 из соотв. ур-й баланса

Узел 0: $P_0^Г - \delta_1 - \delta_2 = 0 \Rightarrow P_0^Г = \delta_1 + \delta_2 =$
$= -4 + 11 = 7$

Узел 1: $P_1^Г = \delta_2 - 2\delta_1 = 11 + 8 = 19$

Несмотря на то, что $\bar{P}_0^Г < \bar{P}_{г0}$, $Г_0$ в оптимальном решении не грузится на полную мощность (в отличие от неэлектрического аукциона)!

Т. к. $0 < P_i^{Г} < \overline{P}_i^{Г}$, то $\pi_i^{Г+} = \pi_i^{Г-} = 0, i=0$

оба генератора $Г_0$ и $Г_1$ будут ценозамыкающими $\Rightarrow$ $\lambda_0 = c_0$, $\lambda_1 = c_1$

Вычислим λ_2. Для этого достаточно рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial б_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_1} = -\lambda_0 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_0 = 4 - 1 = 3$$

Почему цена в узле 2 не совпадает с ценой самого дорогого замыкающего генератора? Рассмотреть $\Delta P_2^П$ в узле 2 и построить соотв. оптимальные приросты $\Delta P_1^Г$ и $\Delta P_2^Г$, вычислить стоимость покрытия нагрузки $\Delta P_2^П$

Определить цену σ насыщенного ограничения.

Рассм. $\dfrac{\partial L}{\partial \delta_2} = -\lambda_0 - \lambda_1 + 2\lambda_2 - \sigma = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma = 2\lambda_2 - \lambda_0 - \lambda_1 = 3$$

Вычислить σ, задав прирост $\Delta \overline{P}_{20}$ и вычислив оптимальной прирост целевой функции.